



**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 08.02.2025**

CLASA a 12 –a

SUBIECTE

Problema 1

a) Fie A o mulțime de numere reale care este parte stabilă în raport cu înmulțirea numerelor reale. Fie B și C două submulțimi nevide ale lui A astfel încât $B \cap C = \emptyset$ și $B \cup C = A$. Se știe că $abc \in B$, pentru orice $a, b, c \in B$ și $abc \in C$, pentru orice $a, b, c \in C$. Arătați că cel puțin una dintre mulțimile B și C este parte stabilă față de înmulțire.

b) Fie (G, \cdot) un grup și a, b două elemente distincte ale sale astfel încât $G \setminus \{a, b\}$ este un subgrup al grupului (G, \cdot) . Demonstrați că G are cel mult 4 elemente.

Problema 2

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + e^{x^3}$.

a) Demonstrați că nicio primitivă a lui f nu este bijectivă.

b) Demonstrați că există o primitivă F a funcției f astfel încât toate primitivele funcției F să fie bijective.

Notă. Pentru toate primitivele din problemă, domeniul de definiție și codomeniul sunt mulțimea numerelor reale.

Problema 3

Fie n un număr natural și (G, \cdot) un grup cu $2n+1$ elemente, astfel încât există o funcție $f: G \rightarrow G$ cu proprietatea $f(xf(xy)) = yf(x^2)$, oricare ar fi $x, y \in G$. Arătați că grupul este abelian.

Problema 4

Fie $f, g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții continue și crescătoare. Arătați că, pentru orice număr real $x \geq 0$,

$$x \cdot \int_0^x f(t)g(t)dt \geq \int_0^x f(t)dt \cdot \int_0^x g(t)dt.$$